第2期　　固体力学学报　　№2
1989年6月　　ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA　　June　1989

调和函数边界积分方程的充要条件

胡海昌

提要　本文以调和函数的边值问题为例，探讨了边界积分方程的充要条件。文中首次提出了超定问题的概念，并建立了超定问题有解的一个充要条件，它也就是直接变量边界积分方程的一个充要条件。文中首次阐明了边界积分方程与变分原理的内在的联系，还指出了间接变量与直接变量两类边界积分方程之间存在着一一对应的关系。文中的概念、思路和论点不难用于其它有变分原理的问题的边界积分方程。

关键词　边界积分方程，调和函数的边值问题

一、前　言

边界积分方程和边界单元法近年来得到了蓬勃的发展，有关论著大量涌现。但是相对来说，对边界积分方程理论问题的研究大大落后于边界单元法的实践。微分方程边值问题的解一定是边界积分方程的解。这个边界积分方程的必要性比较明显，毋需专门研究。但是反过来，边界积分方程的解是否一定是微分方程边值问题的解，这个边界积分方程的充分性问题很不简单。当前虽然已有大量的实践经验，但没有从理论上作出必要的论证。对于只有唯一解的物理问题，这也就是边界积分方程解的唯一性问题。

本文从空间调和函数问题下手来探讨边界积分方程的充要条件。为此，文中首次提出了在边界上给定调和函数本身及其法向导数这样一种超定问题，并且建立了上述超定问题有解的充分必要条件，它同时也就是直接变量边界积分方程的一般的充要条件。

根据上述充要条件，对应于调和函数的每一种基函数，都可以建立一种充要的边界积分方程。常用的直接变量边界积分方程，便是对应于由边界点原所组成的基函数，因而这种边界积分方程是充要的。

每一种间接变量边界积分方程必然对应于一种基函数。通过这种基函数必然可以建立起一种对应的直接变量边界积分方程。反之亦然。这样在本文中首次建立了间接变量和直接变量两类边界积分方程之间的一个一一对应的关系。

本文于1988年4月26号收到。

边界积分方程常被理解为是一种加权残差法(例如见[1])，并认为与变分原理无关。但是本文提出的充要条件其实是变分原理的后果。这样本文首次建立了边界积分方程与变分原理的内在联系，突破了两者无关的传统见解。

本文虽然只讨论空间调和函数的边界积分方程，但是文中的概念、思路和论点可以无多大困难地推广应用于其它有变分原理的问题的边界积分方程。

二、超定问题及其有解的充要条件

为了统一地证明调和函数的多种边界积分方程的充分必要性，我们先来考虑调和函数的下列超定问题。

$$\text{在 }\omega\text{ 内，}\quad \nabla^2\varphi=0 \tag{2.1 a}$$

$$\text{在 }B\text{ 上，}\quad \varphi=\bar{\varphi} \tag{2.1 b}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\bar{\varphi}_n \tag{2.1 c}$$

这里ω是一有限区域，B是ω的边界，$\bar{\varphi}$和$\bar{\varphi}_n$是在B上给定的函数。调和函数只能满足一个边界条件，因而一般说来，问题(2.1)是无解的。这就是我们把它叫做超定问题的原因。在某些特殊情况下，即当$\bar{\varphi}$和$\bar{\varphi}_n$满足适当的条件时，问题(2.1)便有解。下面我们来讨论超定问题有解的充分必要条件。

定理　超定问题(2.1)有解的充分必要条件是：对于所有ω内的调和函数H，都有

$$\int_{B_l}\left(H\bar{\varphi}_n-\frac{\partial H}{\partial n}\bar{\varphi}\right)\mathrm{d}B=0 \tag{2.2}$$

这里B_l是指ω内的闭合曲面趋近于边界B所达到的极限。必要性的证明十分简单，如果问题(2.1)的解φ存在，那么φ和H都是调和函数，于是根据格林公式必有

$$\int_{B_l}\left(H\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial H}{\partial n}\varphi\right)\mathrm{d}B=0 \tag{2.3}$$

将φ及其法向导数的边界值(2.1 b)，(2.1 c)代入，即得到(2.2)。

条件(2.2)的充分性的证明比较繁难。为此设想按下列要求先分别求解两个调和函数φ_1和φ_2：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 }\omega\text{ 内，}\nabla^2\varphi_1=0,\\&\text{在 }B\text{ 上，}\quad\varphi_1=\bar{\varphi};\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 }\omega\text{ 内，}\nabla^2\varphi_2=0,\\&\text{在 }B\text{ 上，}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\bar{\varphi}_n\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

问题(2.4)有且有唯一的解。在充要条件(2.2)成立的前提下，问题(2.5)也一定有解。因为若在条件(2.2)中取$H=1$，便有

$$\int_{B_l}\bar{\varphi}_n\mathrm{d}B=0 \tag{2.6}$$

这正是诺依曼问题(2.6)有解的充要条件. 大家熟知，问题(2.5)的解是不唯一的，在φ_2中可以加减一个任意常数，以后φ_2是指问题(2.5)的某一个解。

根据φ_1和φ_2的边界条件，条件(2.2)可改写成为

$$\int_{B_1}\left(H\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\frac{\partial H}{\partial n}\varphi_1\right)\mathrm{d}B=0 \tag{2.7}$$

对φ_2和H两个调和函数应用格林公式，有

$$\int_{B_1}H\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\mathrm{d}B=\int_{B_1}\frac{\partial H}{\partial n}\varphi_2\mathrm{d}B \tag{2.8}$$

将此代入(2.7)，得到

$$\int_{B_1}(\varphi_2-\varphi_1)\frac{\partial H}{\partial n}\mathrm{d}B=0 \tag{2.9}$$

调和函数H可以任意取，现在把它取为

$$H=\varphi_1-\varphi_2=D \tag{2.10}$$

这样等式(2.9)可写成为

$$\int_{B_1}D\frac{\partial D}{\partial n}\mathrm{d}B=0 \tag{2.11}$$

D也为调和函数，因而上式可进一步化为

$$\int_{\omega}(\nabla D)^2\mathrm{d}\omega=0 \tag{2.12}$$

由此得知

$$\varphi_1-\varphi_2=D=\text{常数} \tag{2.13}$$

即

$$\varphi_1=\varphi_2+D \tag{2.14}$$

此式表明φ_1同时也是问题(2.5)的解．这就是说φ_1是问题(2.1)解．充分性证毕．

三、充要条件与变分原理的联系

上节建立的充要条件(2.2)其实是变分原理的后果．对于调和函数的诺依曼问题(2.5)，相应的极值变分原理是

$$\Pi(\varphi)=\frac{1}{2}\int_{\omega}(\nabla\varphi)^2\mathrm{d}\omega-\int_{B_1}\bar{\varphi}_n\varphi\mathrm{d}B=\min \tag{3.1}$$

因为$\Pi(\varphi)$的二次式部分是非负的，$\Pi(\varphi)$取极小值的充分必要条件是

$$\int_{\omega}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\delta\varphi)\mathrm{d}\omega-\int_{B_1}\bar{\varphi}_n\delta\varphi\mathrm{d}B=0 \tag{3.2}$$

在上述极值原理中，自变函数φ原来是可以任意取的，不过我们既然已经知道φ是调和函数，那么无损于正确性，可以把φ限于调和函数．这样利用格林公式

$$\int_{\omega}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\delta\varphi)\mathrm{d}\omega=\int_{B_1}\varphi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n}\mathrm{d}B \tag{3.3}$$

后，(3.2)式可化为

$$\int_{B_1}\left(\varphi\frac{\partial\delta\varphi}{\partial n}-\bar{\varphi}_n\delta\varphi\right)\mathrm{d}B=0 \tag{3.4}$$

$\delta\varphi$是ω内的任意的调和函数．将它改写成H，得到

$$\int_{B_1}\left(\varphi\frac{\partial H}{\partial n}-\bar{\varphi}_n H\right)\mathrm{d}B=0 \tag{3.5}$$

根据充要条件(2.2)和φ_1满足的边界条件(2.4)，$\varphi=\varphi_1$能满足极值条件(3.5)，这就是说φ_1同时也是诺依曼问题(2.5)的解，因而也就是原超定问题(2.1)的解。

不少作者认为边界积分方程与加权残差法有联系而与变分原理无关(例如见[1]). 本节的证明表明，边界积分方程与变分原理也有密切的联系. 应该改变两者无关的传统看法.

值得注意，本节对变分原理的用法与常规的用法所有不同. 习惯上人们总是利用公式

$$\int_{\omega}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\delta\varphi)\mathrm{d}\omega=\int_{B_1}\delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}B \tag{3.6}$$

而把(3.2)式转变为

$$\int_{B_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\bar{\varphi}_n\right)\delta\varphi\mathrm{d}B=0 \tag{3.7}$$

而在本节中我们利用了公式(3.3)而从公式(3.2)得到(3.5). 等式(3.3)和(3.6)都是正确的，完全可以根据需要随意选用. 正是由于这一差别，使得我们有可能建立边界积分方程和变分原理的内在的联系.

四、调和函数的基函数和充要的边界积分方程

区域ω内的调和函数的基函数是指这样一种线性无关的调和函数，ω内的任一调和函数都可以用基函数的线性组合表示出来，根据上述定义，充要条件(2.2)中的调和函数H只要取某种基函数便可以了. 由此可知，对应于调和函数的每一种基函数，都可以得到一种充分必要的边界积分方程.

大家知道，ω内的调和函数总可以用分布在边界上的点原表示出来（例如见[2]）

$$H(x)=\int_{B_\xi}\mu(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}B_\xi,\quad \xi\in B_\xi \tag{4.1}$$

其中

$$G(x,\ \xi)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{4.2}$$

B_ξ是指由(ξ,η,ζ)点组成的边界(B是由(x,y,z)点组成的边界)，$\mu(\xi)$是点原密度，x和ξ简指(x,y,z)和(ξ,η,ζ). 公式(4.1)是调和函数的一种间接变量的边界积分方程的出发点.

从公式(4.1)可见，当ξ方走遍整个边界B_ξ时，$G(x,\xi)$是调和函数的一种基函数. 把充分必要条件(2.2)中的μ取为$G(x,\xi)$，得到

$$k\bar{\varphi}(\xi)=\int_{B}\left(G\bar{\varphi}_n-\frac{\partial G}{\partial n}\bar{\varphi}\right)\mathrm{d}B \tag{4.3}$$

其中

$$k=\frac{\theta}{2\pi} \tag{4.4}$$

而 θ 是在 $x=\xi$ 处的边界切向锥的顶角，在光滑的边界点上，$k=1/2$．这里请读者注意，由于 $\partial G/\partial n$ 在边界上有一个 $1/r^2$ 阶的奇点，方程(4.2)中的积分已不可能是常规含义下的积分，而是柯西主值含义的积分．为了清楚地表明这一区别，我们把(4.2)中的积分域记为 $\dot{B}$，表示从 B 中挖去以奇点为中心、ε 为半径的小球后得到的开域上积分后令 $\varepsilon\to 0$ 的结果．正是由于条件(2.2)中的 B_I 后来改为(4.2)中的 $\dot{B}$，所以在(4.2)的左端多出一项 $k\bar{\varphi}(\xi)$．关于从(2.2)到(4.2)的推导细节，可参考一般的边界积分方程著作，例如见〔1〕．

方程(4.2)便是调和函数问题中常用的直接变量边界积分方程．上面的推导证明了它是充分必要的．

上面的推理还表明，通过基函数可以建立起间接变量和直接变量两类边界积分方程之间的一种一一对应的关系，即每一种间接变量边界积分方程对应着一种直接变量边界积分方程，反之亦然．

参　考　文　献

〔1〕Brebbia C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, (1978).（C.A.布莱比亚著，武际可和付子智译，工程师用边界单元法，科学出版社，1986）.
〔2〕Kellogg O.D., Foundations of Potential Theory, Dover Publilations, (1953).

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF HARMONIC FUNCTIONS

Hu Haichang

Abstract

A necessary and sufficient condition for the correct formulation of boundary integral equations of harmonic functions is established in the present paper. A super-determined problem of harmonic functions is proposed for the first time. Then a necessary and sufficient condition for the existence of solution of the super-determined problem is proved. At the same time, it is a necessary and sufficient condition for the correct formulation of boundary integral equations with direct unknown quantities. A relation between boundary integral equations and variational principles is discovered for the first time. And a one-to-one correspondence between boundary integral equations with direct and indirect unknown quantities is indicated. The concept and route of the present paper can be applied to other boundary value problems possessing variational principles.

Key words

Boundary integral equation, Boundary value problems of harmonic functions.